

BADANIE ODKSZTAŁCEŃ BELKI ZGINANEJ METODĄ TENSOMETRII OPOROWEJ

1. WPROWADZENIE

1.1. Ogólne wiadomości o pomiarach tensometrycznych.

Tensometria zajmuje się metodami odkształceń ciał stałych. W praktyce laboratoryjnej pomiary odkształceń ogranicza się najczęściej do mierzenia wydłużeń na powierzchni ciała. Wynika to bezpośrednio z charakteru przyrządów pomiarowych jak również faktu, iż ekstremalne wartości odkształceń (naprężeń) występują zazwyczaj na powierzchni ciała. Pomiaru odkształceń wewnątrz ciała, ze względu na jego kłopotliwość, dokonujemy bardzo rzadko.

Omówimy krótko zasadę pomiaru odkształceń liniowych. wybierzemy na powierzchni badanego elementu konstrukcyjnego odcinek pomiarowy o długości l , który nazywać będziemy bazą pomiarową. Dokonajmy za pomocą tensometru pomiaru całkowitego wydłużenia Δl , jakie wystąpiło po przyłożeniu obciążenia. Wartość odkształcenia wyznaczonego za pomocą takiego pomiaru wyniesie:

$$\varepsilon_{ur} = \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

Odpowiada ona wartości teoretycznej tylko w przypadku jednorodnego stanu odkształcenia. W pozostałych przypadkach stanowi wartość odkształcenia uśrednioną na długości bazy. Tak więc im mniejsze jest l , a stan odkształcenia bardziej zbliżony do jednorodnego, tym wartość ε_{ur} jest bliższa rzeczywistej ε w danym miejscu ciała.

Tensometry stosowane obecnie w badaniach odkształceń elementów konstrukcyjnych, ze względu na zasadę według której dokonujemy pomiaru dzielimy na dwie grupy:

- tensometry elektryczne:
 - rezystancyjne zwane również elektrooporowymi lub oporowymi;
 - indukcyjne;
 - pojemnościowe;
 - elektrydynamiczne;
 - piezoelektryczne;
- tensometry mechaniczne:
 - mechaniczne;
 - optyczno-mechaniczne;
 - strunowe.

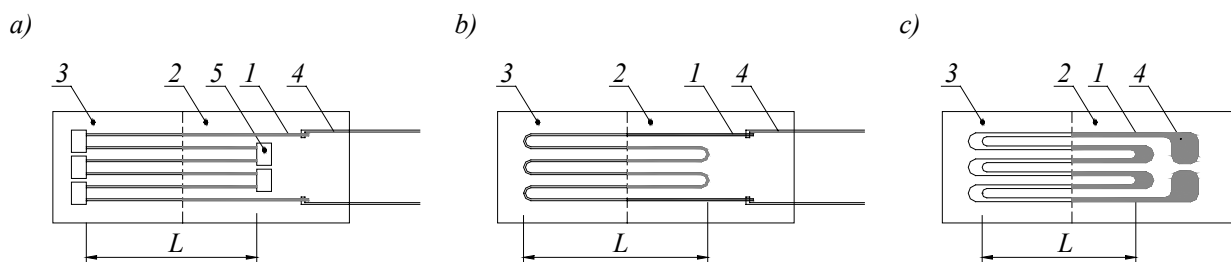
O zastosowaniu odpowiedniego typu tensometru decydują warunki i wymagania pomiaru związane z materiałem, kształtem elementu konstrukcyjnego, rodzajem obciążenia, temperaturą itd. Obecnie najszersze zastosowanie znalazły tensometry oporowe i przy ich użyciu wykonywana jest znaczna większość pomiarów laboratoryjnych i użytkowych.

1.2. Budowa, zasada działania i własności tensometrów oporowych.

Metoda elektrycznej tensometrii oporowej opiera się na znanej własności fizycznej drutu metalowego, polegającej na zmianie jego oporu elektrycznego wraz z doznawaną przezeń zmianą długości.

Wśród ważniejszych jej zastosowań należy wymienić:

- określenie właściwości mechanicznych metali;
- wyznaczenie stanu odkształcenia, a następnie naprężenia w wybranych punktach konstrukcji przy obciążeniach zarówno statycznych i dynamicznych.
- pomiary naprężeń własnych
- pomiary odkształceń w wysokich i niskich temperaturach.



Rys. 1 – Rodzaje tensometrów oporowych: a) wężykowy, b) kratowy, c) foliowy
1 – drucik pomiarowy, 2 – podkładka nośna, 3 – nakładka, 4 – przewody, 5 – taśma miedziana.

a) budowa tensometrów oporowych.

Ze względu na budowę wyróżniamy dwa zasadnicze typy takich tensometrów:

- drucikowy: wężykowy, kratowy
- foliowy (rys. 1).

Tensometr wężykowy jest to drucik rezystancyjny o średnicy 0.02 - 0.05 mm uformowany w kształcie wielokrotnego wężyka. Jest on przyklejony do podkładki nośnej (2) wykonanej zazwyczaj z cienkiego papieru lub folii. Dwa przewody (4) doprowadzają prąd elektryczny. Są one przylutowane do końca drutu oporowego. Paskiem papieru zwanym nakładką (3), chroniony jest drut oporowy przed uszkodzeniami mechanicznymi. Tak przygotowany tensometr przykleja się na powierzchnię badanego elementu stosując specjalny klej.

Tensometry kratowe wyróżniają się brakiem czułości w kierunku prostopadłym do drutu rezystancyjnego. Składają się one z szeregu drucików ułożonych równolegle i połączonych nalutowanymi lub napawanymi znacznie grubszyimi odcinkami taśmy miedzianej (5). Odpowiednie przecięcia taśmy powodują powstawanie obwodu elektrycznego. Siatka oporowa jest naklejona na podkładkę nośną (2) i chroniona od góry nakładką (3).

Aktualnie ze względu na swoje zalety coraz częściej stosuje się **tensometry oporowe foliowe**. Składają się one z siatki rezystancyjnej (1) w postaci wężykowej wykonanej z cienkiej folii metalowej skleionej klejem z podkładką nośną (2). Część pomiarowa wężyka pokryta jest nakładką ochronną (3) wykonaną podobnie jak podkładka nośna z tworzywa sztucznego. Do zakończeń (4) dołącza się przewody elektryczne. Siatkę otrzymuje się podobnie jak obwody drukowane metodą fotochemiczną bezpośrednio po naklejeniu folii na podkładkę nośną. Sposób mocowania tensometru foliowego do powierzchni badanego przedmiotu odbywa się za pomocą odpowiedniego klejów podobnie jak w przypadku tensometrów drucikowych.

b) zasada pomiaru odkształceń

Opór elektryczny tensometru wyraża się zależnością:

$$R = \frac{l}{S} \cdot \rho \quad (2)$$

gdzie: ρ - opór właściwy

l - długość czynna

S - pole przekroju poprzecznego drutu użytego na wykonanie czujnika pomiarowego.

Założmy iż tensometr pracuje w warunkach rozciągania (lub ściskania) w kierunku równoległym do osi drutu oporowego, o przekroju kołowym o średnicy d ($S = \pi \cdot d^2/4$). W takim przypadku w dowolnym miejscu drutu wystąpi jednoosiowy stan naprężenia o stałej wartości σ . Wartości odkształceń w kierunku równoległym od osi drutu będą równe:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3)$$

zaś w dowolnym poprzecznym wyniosą:

$$\varepsilon_1 = -\nu \cdot \varepsilon \quad (4)$$

gdzie: E - moduł Young'a

ν - liczba Poisson'a materiału drutu.

Stosując metodę pochodnej logarytmicznej (używaną w rachunku błędów) wzór (2) można zapisać w postaci:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \varepsilon - \frac{dS}{S} \quad (5)$$

gdzie: $\varepsilon = \frac{dl}{l}$

Dla skończonych przyrostów zależność (5) przyjmuje formę:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \varepsilon - \frac{\Delta S}{S} \quad (6)$$

Stosując metodę pochodnej logarytmicznej dla zależności na pole przekroju poprzecznego drutu i przechodząc do przyrostów skończonych łatwo pokazać, iż zachodzi:

$$\frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta d}{d} \quad (7)$$

Ponieważ d jest wymiarem prostopadłym do osi drutu więc na podstawie (4) można zapisać:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\nu \cdot \varepsilon \quad (8)$$

Z zależności (7) i (8) mamy:

$$\frac{\Delta S}{S} = -2 \cdot \nu \cdot \varepsilon \quad (9)$$

Wstawiając to wyrażenie do związku (6) otrzymujemy wzór na względny przyrost oporu postaci:

$$\frac{\Delta R}{R} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{\varepsilon} + 1 + 2 \cdot \nu \right) \cdot \varepsilon \quad (10)$$

Okazuje się, że wartość wyrażenia:

$$k = 1 + 2 \cdot \nu + \frac{\Delta\rho}{\rho} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \quad (11)$$

do pewnej wartości odkształcenia względnego ε jest wielkością stałą. Graniczne wartości ε , dla których k pozostaje stałe nazywamy zakresem pomiarowym tensometru oporowego. Wielkość k nazywa się współczynnikiem odkształceniowej tensometru lub też krótko - stałą tensometru. Ostateczny związek między względnym przyrostem oporu $\Delta R/R$ a odkształceniem ε , stanowi podstawową zależność tensometrii oporowej, ma więc postać:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon \quad (12)$$

Odształcenie względne ε jest wprost proporcjonalne do względnego przyrostu oporu $\Delta R/R$. Wartość stałej k zależy przede wszystkim od materiału z którego jest wykonany drut oporowy np. tensometry wykonane z konstantanu posiadają stałą $k = 2.1 - 2.4$. Na wartość stałej k ma również wpływ sposób ułożenia drutu oporowego, rodzaj kleju, rodzaj materiału podkładki itd. Wartość tej stałej określa się doświadczalnie. Stała tensometru k , długość bazy pomiarowej l oraz oporność R są **parametrami charakteryzującymi** dany tensometr oporowy. Wielkości charakteryzujące partię czujników podaje producent na opakowaniu. Przykład: RL 15/120 - tensometr oporowy o bazie $l = 15$ mm i oporności $R = 120 \Omega$.

c) właściwości tensometrów oporowych

Tensometry oporowe w porównaniu z innymi tensometrami wyróżniają się następującymi zaletami:

- mają dużą czułość, co pozwala mierzyć bardzo małe odkształcenia;
- wyróżniają się dużą dokładnością pomiarów co wynika z ich charakterystyki liniowej i wiąże się z możliwością stosowania w układach pomiarowych wzmacniaczy;
- mają niewielkie wymiary dzięki czemu można nimi badać zjawiska spiętrzenia naprężeń, a z powodu małych mas nadają się do badania procesów dynamicznych;
- są niewrażliwe na drgania i wstrząsy, mogą pracować w wysokich temperaturach i ciśnieniach;
- dzięki możliwościom stosowania odpowiednich układów pomiarowych informacje o odkształceniu można rejestrować np. na taśmie magnetycznej, czy w pamięci maszyny cyfrowej;
- zapewniają łatwość sterowania procesów obciążenia i odciążenia;
- obsługa jest łatwa i bezpieczna;
- tensometry można umieszczać na powierzchniach zakrzywionych.

Mimo niewątpliwych zalet i szerokiego zakresu zastosowań tensometry oporowe posiadają pewne wady. Do podstawowych można zaliczyć:

- dość kłopotliwy i złożony charakter czynności związanych z naklejaniem tensometru na badany element;
- przydatność tylko do jednorazowego użycia, gdyż przy zdejmowaniu z miejsca pomiarowego prawie zawsze ulegają uszkodzeniu;
- wrażliwość na zmianę temperatury i wilgoć;
- potrzebę kilkukrotnego obciążenia wstępnego ze względu na występowanie histerezy w pierwszych pomiarach po naklejeniu.

1.3. Zasada działania i podstawowe własności wybranych typów tensometrów.

Ponieważ ograniczymy się do omówienia kilku wybranych typów tensometrów, Czytelnik zainteresowany tematyką pełniejsze omówienie tych oraz opis pozostałych typów może znaleźć w książce po redakcją Z. Orłosa [4].

a) **tensometry indukcyjne** - zasada działania takich tensometrów oparta jest na zjawisku zmiany indukcyjności własnej lub zespołu cewka indukcyjna - rdzeń magnetyczny spowodowanej odkształceniem badanej konstrukcji.

b) **tensometry pojemnościowe** - są montowane w ten sposób, iż w wyniku odkształcenia konstrukcji następuje zmiana odległości między płytkami kondensatora, stanowiącego zasadniczy element tensometru pojemnościowego. Z kolei zmiana odległości między płytkami powoduje zmianę pojemności elektrycznej, którą można zmierzyć w odpowiednim obwodzie elektrycznym.

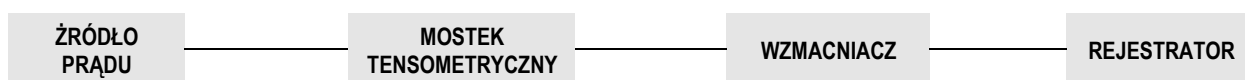
c) **tensometry piezoelektryczne** - zasada działania takich tensometrów opiera się na zjawisku piezoelektrycznym, tj. na pojawianiu się ładunków elektrycznych na odpowiednich ścianach kryształu przy odkształcaniu niektórych kryształów w granicach plastyczności

d) **tensometry mechaniczne** - głównymi elementami tensometrów mechanicznych, za pomocą których wykonuje się pomiar przemieszczeń są dźwignie, pręty, przekładnie zębate. Bazę tensometru tworzą zazwyczaj dwa ostrza pryzmatyczne dociskane do powierzchni badanego elementu za pomocą odpowiednich zacisków. Odkształcenie konstrukcji powoduje zmianę między ostrzami, z których jedno połączone przegubowo uruchamia zespół dźwigni powodując w ostatecznym efekcie przemieszczenie się wskazówki po skali, co pozwala na odczyt.

1.4. Układy pomiarowe

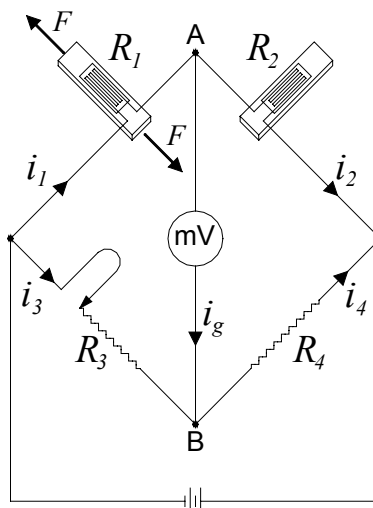
W układach pomiarowych stosowanych w pomiarach metodą tensometrii oporowej można wyróżnić cztery podstawowe części.

- część zasilająca w postaci generatora lub źródła prądu;
- mostek tensometryczny wraz z tensorem pomiarowym;
- wzmacniacz zwiększający bez zniekształceń wielkość impulsu z czujnika;
- urządzenie rejestrujące zmiany mierzonej wielkości.



Rys. 2 - Układ pomiarowy.

a) **mostek tensometryczny** - najczęściej stosuje się mostki, których zasada działania oparta jest na mostku Wheatstone'a. Schemat urządzenia tego typu przedstawiono na rys. 3.



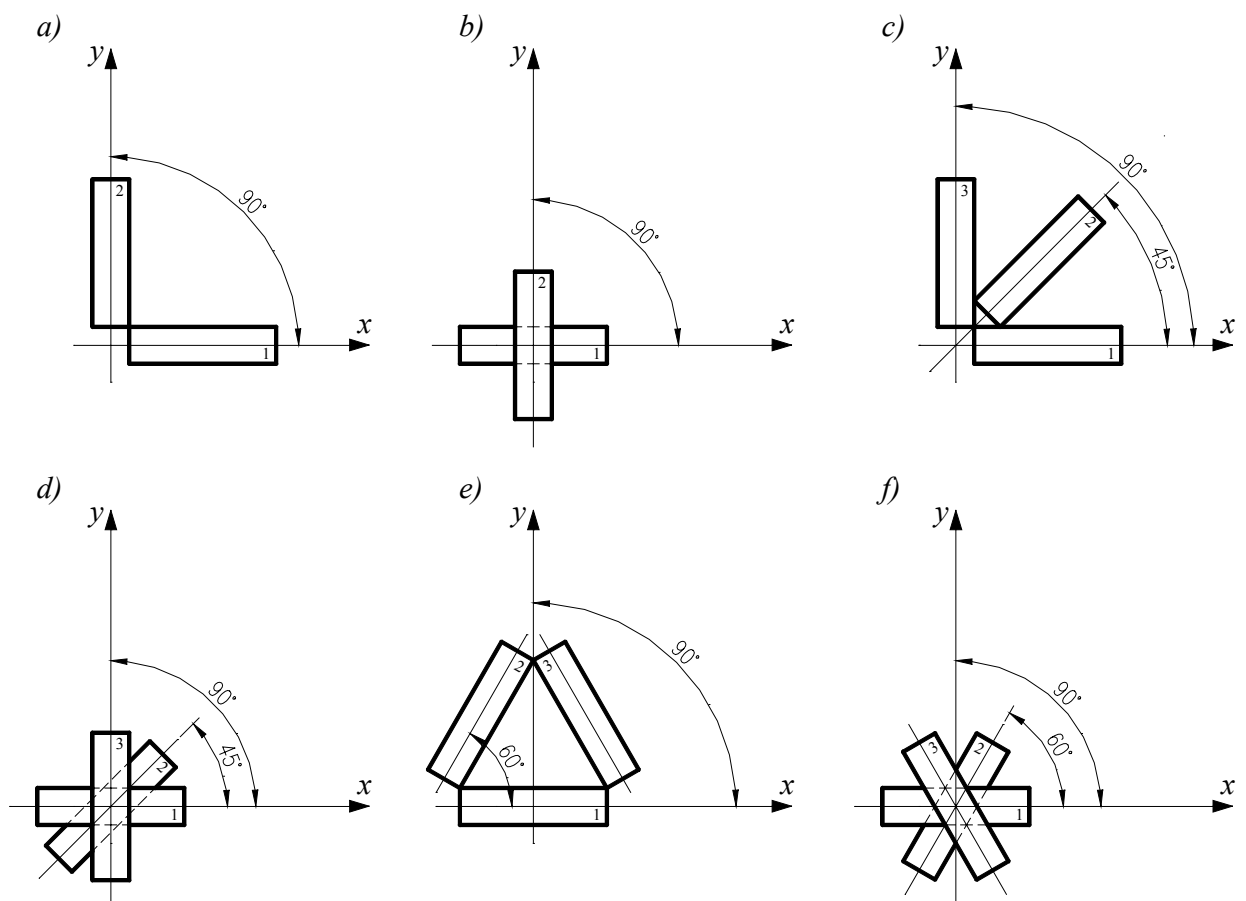
Rys. 3 – Schemat układu pomiarowego.

Mostek ten składa się z czterech gałęzi utworzonych z czterech elementów: tensometru czynnego o oporności R_1 , tensometru kompensacyjnego o oporności R_2 i dwóch oporników o oporach R_3, R_4 . Tensometr kompensacyjny kompensuje wpływy czynników ubocznych, a szczególnie temperatury i wilgoci. Naklejany jest on na element wykonany z takiego samego materiału jak badana konstrukcja i znajdujący się w takich samych warunkach termicznych i wilgotnościowych. Element powyższy jest zazwyczaj nieobciążony, chociaż można stosować inne rozwiązania konstrukcyjne np. tak umieścić tensometr kompensacyjny, aby doznawał odkształceń takich samych co do wartości lecz przeciwnych co do znaku jak tensometr pomiarowy.

1.5. Zastosowanie tensometrów oporowych do badania jednoosiowego płaskiego stanu naprężenia

Informacja uzyskana z pojedynczego tensometru pomiarowego, w przypadku nieznanymi kierunków głównych nie wystarcza nawet do zbadania jednoosiowego stanu naprężenia. W związku z tym w praktyce stosuje się układy tensometrów naklepanych w tym samym miejscu lub bardzo blisko siebie zwane rozetami tensometrycznymi.

Rozety tensometryczne - tensometry wchodzące w skład rozety rozmieszcza się tak, aby do minimum ograniczyć błąd wynikający ze skończonych jej wymiarów. Dla uproszczenia obliczeń kąty w układach rozetowych przyjmują tylko pewne charakterystyczne wielkości (45° , 60° , 90° , 120°). Schematy rozet, uwzględniających te kąty są pokazane na rysunku poniżej

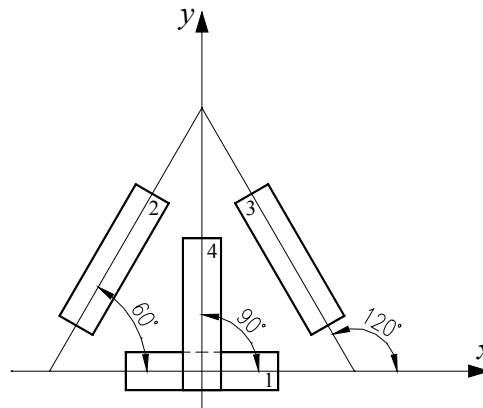


Rys. 4 - Rodzaje rozet tensometrycznych.

W praktyce znajduje zastosowanie kilka typów rozet. Najprostsze, prostokątne tworzone są z dwóch tensometrów przylegających do siebie lub skrzyżowanych (rys. 4 a, b).

- Do bardziej złożonych zaliczamy rozety utworzone z trzech tensorów i tutaj można wyróżnić:
- rozety prostokątne złożone (rys. 4 c) oraz identyczne pod względem obliczeniowym rozety prostokątne skrzyżowane, zwane gwiazdowymi, wyróżniające się zwartą budową (rys. 4 d);
 - rozety typu „delta” (rys. 4 e) i inne równoważne im pod względem obliczeniowym (np. rys. 4 f)

Stosuje się również rozety zbudowane z czterech tensometrów np. typu „T - delta” (rys. 4 g), gdzie czwarty tensometr spełnia rolę pomocniczą lub kontrolną.



Rys. 4 g - Rozeta 4-tensometrowa.

1.5.1 Jednoosiowy stan naprężenia

W przypadku znajomości kierunku pomiar przeprowadza się jednym tensorem naklejonym równoległe do jego kierunku. W wyniku pomiaru uzyskujemy wartość odkształcenia głównego ε_1 , i stąd wyznaczamy wartość naprężenia na podstawie prawa Hooke'a:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \cdot E \quad (13)$$

W przypadku nieznanego kierunku głównego pomiary przeprowadza się za pomocą rozety złożonej z trzech tensometrów, czyli tak jak dla płaskiego stanu naprężenia.

1.5.2 Płaski stan naprężenia

Gdy na powierzchni badanego elementu konstrukcyjnego występuje płaski stan naprężenia związany z prostokątnym układem współrzędnych o osiach x, y obranych dowolnie na tej powierzchni, to wówczas tensor naprężenia przyjmuje postać:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Można również zapisać ten tensor w kierunkach głównych 1, 2 wyznaczających prostokątny układ współrzędnych obróconych względem osi x, y o pewien kąt φ . Wtedy :

$$\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

Odpowiadające tensorom naprężenia ze wzorów (14) i (15) tensory odkształcenia są odpowiednio równe:

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (16)$$

W myśl prawa Hooke'a związki między współrzędnymi wyżej zdefiniowanych tensorów są określone zależnościami liniowymi:

- w kierunkach osi x, y :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{11} - \nu \cdot \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_{22} - \nu \cdot \sigma_{11}) \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \cdot \gamma_{12} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \sigma \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie: γ_{12} jest kątem odkształcenia postaciowego;

- w kierunkach głównych:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (18)$$

Odwracając związki (17) i (18) można wyrazić naprężenia w funkcji odkształceń:

- w kierunkach osi x, y :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \cdot \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \cdot \varepsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{12} = G \cdot \gamma_{12} \end{aligned} \quad (19)$$

- w kierunkach głównych:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2) \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (20)$$

Chcąc więc za pomocą zależności (19) lub (20) określić stan naprężenia w danym miejscu powierzchni badanego ciała należy wyznaczyć, drogą pomiarów:

- wartość odkształceń $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}$ lub
- wartość odkształceń głównych $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Drugi przypadek stosujemy wówczas, gdy kierunki główne w badanym punkcie są znane. Problem sprowadza się wówczas do naklejenia rozety prostokątnej złożonej z dwóch tensometrów (rys. 4a, 4b) zgodnie z kierunkami głównymi a poszukiwane wartości naprężeń głównych wyliczamy ze wzoru (20). Pierwszy przypadek jako znacznie ogólniejszy, stosujemy wtedy gdy nie znamy kierunków głównych. Zadanie sprowadzamy do wyznaczenia kierunków głównych i wartości odkształceń głównych $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Aby rozwiązać tak sformułowany problem, musimy wyjść z dowolnie wybranych w danym punkcie kierunków x, y i powołać się na wzory:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2} \quad (21)$$

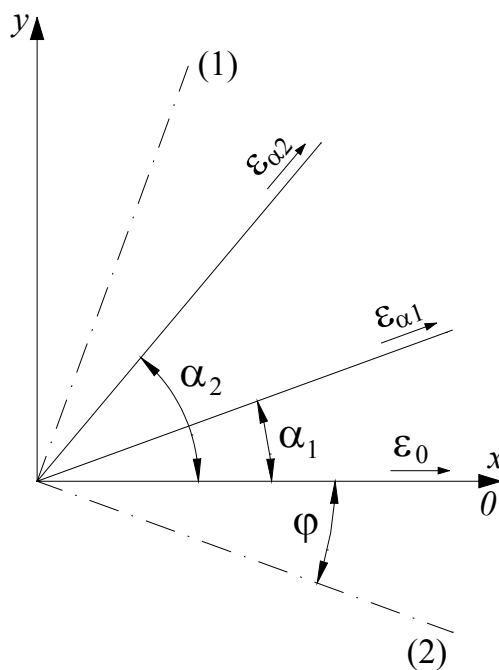
oraz

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{\gamma_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \quad (22)$$

Jak wiadomo wzór (21) służy do obliczania wartości odkształceń głównych, zaś wzór (22) do wyznaczania kierunków głównych w płaskim stanie naprężenia. Okazuje się, że znacznie dogodniej jest określić stan odkształcenia w badanym punkcie łatwymi do zmierzenia trzema wydłużeniami w trzech dowolnie przyjętych kierunkach. Wiąże się to ze stosowaniem rozet tensometrycznych o trzech tensometrach. W praktyce przyjęły się dwa sposoby ustawienia tensometrów w rozecie oparte na wspólnej zasadzie opisanej niżej:

- rozeta prostokątna (rys. 4c i 4d)
- rozeta typu „delta” (rys. 4e i 4f)

W danym punkcie badanej powierzchni wybieramy dowolnie kierunek wyjściowy - oznaczony O - który z jednym z szukanych kierunków tworzy nieznaną kątem φ (rys. 5). Następne dwa kierunki tak aby z kierunkiem wyjściowym O tworzyły odpowiednio dobrane kąty α_1, α_2 . Kątom tym nadajemy wartości zależną wybranego sposobu ustawienia tensometrów, przy czym ustawienia oznaczamy symbolicznie O, α_1, α_2 .



Rys. 5 - Sposoby ustawienia tensometrów w rozecie.

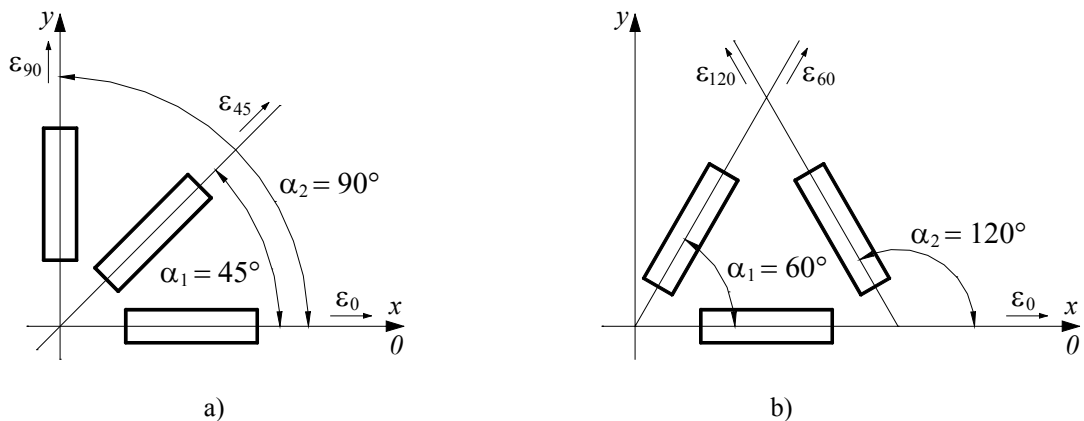
Po zmierzeniu odkształceń ε_0 , ε_{α_1} , ε_{α_2} w tych kierunkach korzystamy każdorazowo ze wzoru transformacyjnego dla odkształceń w ogólnej postaci:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{\gamma_{12}}{2} \cdot \sin(2\alpha) \quad (23)$$

Wzór powyższy podaje zależność pomiędzy odkształceniem ε_{α} , mierzonym w dowolnym kierunku określonym kątem α w stosunku do przyjętego kierunku osi x , a składowymi odkształceniami w obranym układzie współrzędnych x, y . Jeżeli do wzoru (23) wstawimy po lewej stronie kolejno wartości ε_0 , ε_{α_1} , ε_{α_2} uzyskane z pomiarów, otrzymamy układ trzech równań o trzech niewiadomych ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} . Po rozwiązaniu tegoż układu ze względu na niewiadome, wstawiamy wyliczone wartości ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} do wzorów (21) i (22) uzyskując kompletne określenie stanu naprężenia w badanym punkcie powierzchni obciążonego elementu konstrukcyjnego.

Poniżej w formie przykładów omówimy krótko dwa podstawowe typy ustawienia tensometrów wraz z podaniem podstawowych zależności obliczeniowych.

Rozeta prostokątna (rys 6a). Zgodnie z ogólną zasadą przy tym ustawieniu $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$. Kąty te naniesiono na rys. 6a, na którym tensometry schematycznie przedstawiono w postaci prostokątów.



Rys. 6 - a) rozeta prostokątna, b) rozeta typu „delta”

Stosując wzór ogólny (23) podstawiamy w nim kolejno wartości kątów $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ otrzymując układ równań:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cdot \cos(0^\circ) + \frac{\gamma_{12}}{2} \cdot \sin(0^\circ) \\ \varepsilon_{45} &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cdot \cos(90^\circ) + \frac{\gamma_{12}}{2} \cdot \sin(90^\circ) \\ \varepsilon_{90} &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cdot \cos(180^\circ) + \frac{\gamma_{12}}{2} \cdot \sin(180^\circ) \end{aligned} \quad (24)$$

Układ ten ma następujące rozwiązania:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_0 \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{90} \\ \gamma_{12} &= 2 \varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}) \end{aligned} \quad (25)$$

Mając zmierzone wartości odkształceń ε_0 , ε_{45} , ε_{90} , obliczamy ze wzorów (25) odkształcenia ε_{11} , ε_{22} , γ_{12} , po czym wstawiamy je do wzorów (21) i (22), wyliczając odkształcenia główne

ε_1 , ε_2 oraz kąt φ jaki tworzy przyjęty dowolnie kierunek wyjściowy O z pierwszym z kierunków głównych. Po prostych przekształceniach wzory (21) i (22) w przypadku rozety prostokątnej przyjmują postać:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2} \quad (26)$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_0 + \varepsilon_{90})}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90}} \quad (27)$$

Rozeta typu „delta” (rys. 6b). Przyjęte wartości kątów wynoszą $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$. Stosując wzór ogólny (23), po podstawieniu w nim wartości kątów $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 120^\circ$ uzyskujemy układ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \\ \varepsilon_{60} &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma_{12}}{2} \\ \varepsilon_{120} &= \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma_{12}}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

Układ ten ma rozwiązania:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 0 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{2(\varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}) - \varepsilon_0}{3} \\ \gamma_{12} &= \frac{2}{3}(\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) \end{aligned} \quad (29)$$

Znając wyniki pomiarów odkształcenia ε_0 , ε_{60} , ε_{120} postępujemy dalej podobnie jak w poprzednim przykładzie, wykorzystując wzory (21) i (22). W ten sposób wyrażenia na odkształcenia główne doprowadzamy do postaci:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2 + (\varepsilon_{120} - \varepsilon_0)^2} \quad (30)$$

a kierunki główne wyznaczamy ze wzoru:

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{3(\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120})}{\varepsilon_0 - (\varepsilon_{60} + \varepsilon_{120})} \quad (31)$$

1.6. Przykłady innych zastosowań tensometrów oporowych

Zaproponowane niżej sposoby wykorzystywania tensometrów oporowych mają charakter pomiarów pośrednich tzn. w wyniku samego pomiaru uzyskuje się wartości odkształceń, a wartości poszukiwanych wyliczamy mając zależności wiążące je z odkształceniami. Powyższe zależności mogą też zawierać wartości stałych materiałowych, wymiary konstrukcji itd. wyznaczone za pomocą innych pomiarów.

1.6.1 Wyznaczenie sił w prętach rozciąganych lub ściskanych metodą tensometryczną

Jak wiadomo w pręcie takim występuje jednorodny, jednoosiowy stan naprężenia o znanym kierunku głównym. W związku z tym na podstawie rozważań przeprowadzonych dla takiego stanu i wzoru (13) wyznaczamy wartości naprężenia, a stąd wartości siły normalnej:

$$N = \sigma_1 \cdot A \quad (32)$$

gdzie: A - pole przekroju poprzecznego.

1.6.2. Pomiar momentu gnącego i siły poprzecznej metodą tensometryczną

Załóżmy, że element belkowy o przekroju $b \times h$ pracuje w stanie prostego zginania. Wówczas pojedynczy tensometr naklejony w określonej odległości od osi obojętnej i tak aby elementy oporowe przejmujące odkształcenie były ułożone równoległe do osi belki. Znając odczyt z takiego czynnika, więc i wartości odkształcenia ε , moment gnący M_g wyznaczamy na podstawie zależności wyprowadzonych w teorii zginania:

$$M_y = \sigma \cdot \frac{J_y}{z} = \varepsilon \cdot E \cdot W_y \quad (33)$$

gdzie: J_y - moment bezwładności względem osi y
 W_y - wskaźnik przekroju na zginanie

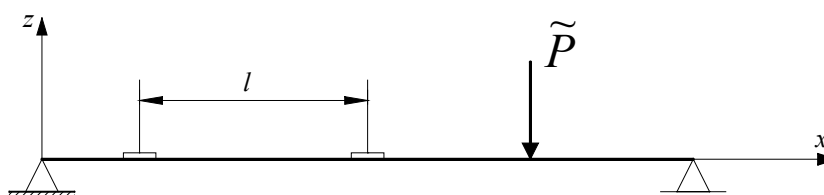
Wartości sił poprzecznych T wyznaczamy za pomocą pomiaru momentu gnącego w odpowiednio wybranych punktach na belce. Rozważania oprzemy na zależności różniczkowej:

$$T = \frac{dM_g}{dx} \quad (34)$$

Ograniczymy się do przypadku belki obciążonej siłami i momentami skupionymi, dla której M_g jest funkcją liniową położenia, a T funkcją przedziałami stałą. Dzięki naklejeniu w pewnej odległości l dwóch tensometrów i pomiarowi momentów gnących obliczymy wartość siły poprzecznej T z równania wynikającego z (34):

$$T = \frac{M_y^{<1>} - M_y^{<2>}}{l} \quad (35)$$

gdzie: $M_y^{<1>}$ można obliczyć ze wzoru (33)



Rys. 7 - Pomiar momentu gnącego i siły poprzecznej.

1.6.3. Pomiar momentu skręcającego metodą tensometryczną

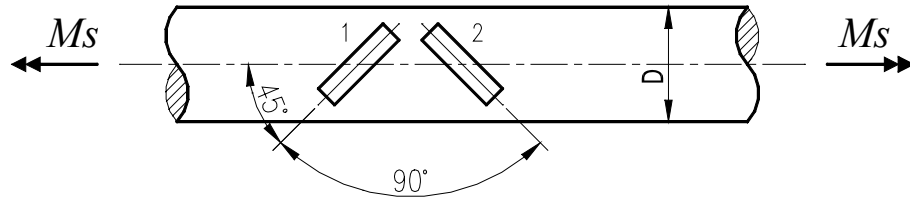
Pomiar ten ma duże znaczenie praktyczne, gdyż pozwala określić moment skręcający M_s przenoszony w ruchu obrotowym przez wałek w przekroju kołowym o średnicy D . Jak wiadomo z teorii skręcania zależność pomiędzy momentem M_s i naprężeniem stycznym w warstwie skrajnej τ jest postaci:

$$M_s = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \tau \quad (36)$$

Wymienione wcześniej naprężenie styczne działa stycznie do obwiedni przekroju poprzecznego wałka i wywołuje stan czystego ścinania. W związku z tym kierunki główne w dowolnym punkcie wałka są obrócone o kąt 45° w stosunku do kierunku wyznaczonego przez styczną do przekroju poprzecznego przekroju i leżą w płaszczyźnie stycznej do wałka, zaś wartości główne stanu naprężenia jak i odkształcenia są takie same co do wartości lecz przeciwnie co do znaków:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_2 \\ \varepsilon_1 &= -\varepsilon_2\end{aligned}\quad (37)$$

Dlatego tensometry mierzące odkształcenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ przyklejamy do powierzchni bocznej wałka w sposób pokazany na rysunku poniżej:



Rys. 8. Pomiar momentu skręcającego.

Należy zauważyć, iż w zasadzie wystarczy jeden tensometr lecz pomiar z dwóch pozwala na uśrednienie wielkości $|\varepsilon_1|$ i $|\varepsilon_2|$. Ponieważ $\tau = G \cdot \gamma$, a ze wzorów transformacyjnych wynika, że $|\gamma| = |2 \cdot \varepsilon_1| = |2 \cdot \varepsilon_2|$ więc:

$$\tau = 2 G \cdot \varepsilon_1 \quad (38)$$

i ostatecznie wartość momentu skręcającego wyrazi się wzorem:

$$M_s = \frac{\pi \cdot D^3}{8} \cdot G \cdot \varepsilon_1 \quad (39)$$

1.7. Sposób naklejania tensometrów

Właściwą pracą czujnika tensometrycznego, oprócz dobrej budowy, zapewnia poprawne zamocowanie go na powierzchni badanego przedmiotu. Dlatego też przyklejanie tensometrów należy wykonać ze szczególną dokładnością i laboratoryjną czystością. Powierzchnię, na której naklejamy czujnik należy przetrzeć papierem ściernym dla zlikwidowania wszelkich nierówności i śladów, a następnie odtłuścić acetonem lub innym środkiem chemicznym. Po dwukrotnym nałożeniu warstwy kleju łączymy czujnik z badanym elementem lekko go dociskając, aż do całkowitego wyschnięcia. Bardzo ważnym czynnikiem decydującym o wierności wskazań i prawidłowej pracy tensometrów oporowych są kleje tensometryczne, stosowane zarówno do wyrobu czujników jak i do ich naklejania na powierzchnię badanych przedmiotów.

Kleje tensometryczne powinny mieć następujące własności:

- brak pełzania pod obciążeniem;
- wysokie właściwości izolacyjne;
- bardzo mała histereza przy obciążaniu i odciążaniu;
- odporność na działanie podwyższonych temperatur;
- dobra przyczepność do podłoża;
- odporność na działanie środków chemicznych.

Produkowane obecnie kleje są kompozycjami różnych składników w różnych proporcjach, zależnie od gatunku tensometru i materiałów. Pojawiły się także kleje szybkoschnące pozwalające na przeprowadzenie pomiarów w kilka minut po naklejeniu.

2. WYZNACZENIE ROZKŁADU ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ W BELCE ZGINANEJ ZA POMOCĄ TENSOMETRII OPOROWEJ

2.1 Cel ćwiczenia

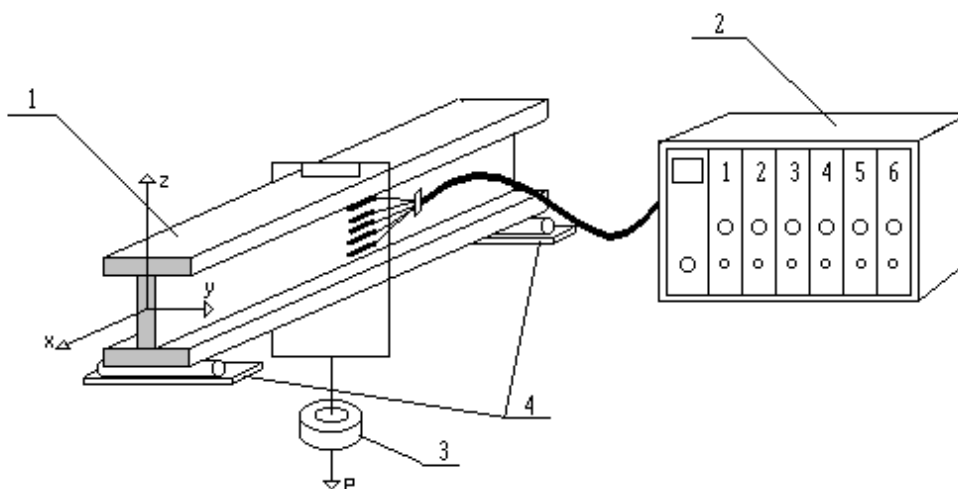
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z techniką pomiarów odkształceń metodą tensometrii oporowej i wyznaczenie doświadczalnie rozkładu naprężeń normalnych w belce zginanej.

2.2. Stanowisko pomiarowe

Stanowisko (rys. 9) składa się z badanej belki dwuteowej wykonanej ze szkła organicznego (plexiglasu), dwóch podpór (wałeczków), szalki z obciążnikami i czujników. W przekroju środkowym belki (na średniku) naklejone są tensometry, których położenie od teoretycznej osi obojętnej wyznaczone jest przez wielkość z_i .

2.3. Przebieg pomiarów

- zapoznać się z instrukcją obsługi mostka tensometrycznego MT - 12;
- skompensować i wykalibrować mostek dla poszczególnych tensometrów;
- obciążyć belkę obciążeniem P_1 i odczytać wskazanie mostka (wyniki zanotować w tabeli pomiarów);
- zwiększyć obciążenie do P_2 i powtórzyć odczyt (wyniki zanotować w tabeli pomiarów)



Rys. 9 - Stanowisko pomiarowe (1 - belka; 2 - mostek; 3 - szalka z obciążeniem; 4 - podpory)

2.4. Opracowanie wyników pomiarów

1. Wyznaczyć naprężenie σ (kolumna 4 tabeli)
2. Wyznaczyć moment zginający M_y (kol. 5)
3. Wyznaczyć teoretyczny moment zginający (kol. 6)
4. Porównać otrzymane w kolumnach wielkości naprężeń i momentów teoretycznych i otrzymanych z doświadczenia.
5. Wykonać wykres rozkładu naprężeń normalnych otrzymanych z pomiarów z rozkładem teoretycznym.
6. Wyciągnąć i zapisać wnioski co do doświadczalnego rozkładu naprężeń w przekroju środkowym belki.

Tabela i wzór protokołu sprawozdania

WYZNACZENIE ROZKŁADU ODKSZTAŁCENÍ I NAPRĘŻENÍ W BELCE ZGINANEJ ZA POMOCĄ TENSOMETRII OPOROWEJ

Protokół nr

Materiał belki

Wymiary przekroju belki

Moment bezwładności przekroju belki

Tabela pomiarów

Odległość tensometru od osi obojętnej	Nr tensometru	Odkształcenie zmienne	Naprężenie zmierzone	Moment gnący	
				zmierzony	teoretyczny
		ε	$\sigma = \varepsilon \cdot E$	$M_y = \frac{\varepsilon}{z} \cdot E \cdot J$	$M_y = \frac{P \cdot l}{4}$
[mm]		[%]	[MPa]	[Nm]	[Nm]
1	2	3	4	5	6
Przy sile					
	1				
	2				
	3				
	4				
	5				

Literatura

1. Bachmacz W. - Wytrzymałość materiałów. Badania doświadczalne, Skrypt Politechniki Częstochowskiej, 1973.
2. Boruszak A., Sygulski R., Wrześniowski K. - Wytrzymałość materiałów. Doświadczalne metody badań. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1977.
3. Ćwiczenia laboratoryjne z wytrzymałości materiałów. Praca zbiorowa pod redakcją M. Banasika. PWN, Warszawa, 1985.
4. Doświadczalna analiza odkształceń i naprężeń - pod red. Z. Orłosia. PWN, Warszawa, 1977.
5. Dryński T. - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki. PWN, Warszawa, 1980.
6. Katarzyński S., Kocańda S., Zakszewski M. - Badania właściwości mechanicznych metali. WNT, Warszawa, 1967.
7. Laboratorium z wytrzymałości materiałów. Praca zbiorowa pod redakcją S. Mazurkiewicza. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, 1978.